* R R - 0 8 3 0 / 6 0 0 *

RR-0830

Third Year B. Sc. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - IX

(Discrete Mathematics)

(New Course)

Time : 3 Hours] [Total Marks : **105**

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :
☛ **T.Y. B.Sc.**

Name of the Subject :
☛ **MATHEMATICS - 9 (NEW)**

☛ Subject Code No. : **0 8 3 0** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **NIL**

Seat No. :

Student's Signature

(૨) બધા જ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.

(૩) જમણી બાજુના અંક જે તે પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

(૪) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : **૧૫**

(૧) લેટિસમાં વિભાજિત અસમતા જણાવો. ૧

(૨) વ્યાખ્યાયિત કરો : ૨

(અ) આંશિક ક્રમબદ્ધતા

(બ) જાલિકા સમરૂપતા

(૩) વિભાજિત લેટિસમાં બતાવો કે જો aનો પૂરક a' હોય તો a' એક અને માત્ર એકજ છે. ૨

(૪) $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_3)'$નો "ગુણાકારોના સરવાળા સ્વરૂપે" તરીકે વ્યક્ત કરો. ૨

(૫) લેટિસમાં સાબિત કરો કે : જો $a \le b$ હોય તો $a \oplus b = b$ ૨

(૬) આલેખનો ગોલીય સરવાળો વ્યાખ્યાયિત કરો. ૧

(૭) એવો આલેખ દોરો કે જે યુલર હોય પરંતુ સ્વૈર દોરીય આલેખ ન હોય. ૧

(૮) સંપૂર્ણ આલેખ ૧૦-શિરોબિંદુવાળો હોય તો તેમાં હેમિલટોનીય પરિપથોની સંખ્યા જણાવો. ૧

(૯) ૫-શિરોબિંદુવાળા દ્વિ-ટ્રીમાં $l-\min$ શોધો. ૧

(૧૦) બે શિરોબિંદુઓનું જોડાણ વ્યાખ્યાયિત કરો. ૨

૨ (અ) લેટિસ $\langle L, \leq \rangle$માં સાબિત કરો કે : ૭

(૧) $a \leq b \Leftrightarrow a \nless b = a, \forall a, b \in L$

(૨) $a \leq c \Rightarrow a \oplus (b \nless c) \leq (a \oplus b) * c, \forall a, b, c \in L$

(બ) ધારો કે $e(s)$ એ ગણ sનો ઘાતગણ છે. સાબિત કરો કે $\langle e(s), \underline{c} \rangle$એ આંશિક ક્રમબદ્ધ છે. તે લેટિસ છે ? તમારા જવાબને યથાર્થ કરો. ૬

(ક) ધારો કે $\langle L, *, \oplus \rangle$ લેટિસ છે, પ્રત્યેક $a, b \in L$ માટે $a \leq b$ હોય તો સાબિત કરો કે : ૫

$[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ એ ઉપલેટિસ છે.

અથવા

૨ (અ) લેટિસનો સીધો ગુણાકારને વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે બે લેટિસનો સીધો ગુણાકાર પણ એક લેટિસ છે. ૭

(બ) ધારો કે S_n એ nનાં બધા ધન અવયવોનો ગણ છે. S_nમાં D એ ભાગાકારનો સંબંધ દર્શાવે છે. સાબિત કરો કે $\langle S_{30}, D \rangle$ એ લેટિસ છે. તેની હેઝ આકૃતિ દોરો. ૬

(ક) લેટિસ $\langle L, \leq \rangle$ માટે સાબિત કરો કે ૫

$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$, જ્યાં $a, b, C \in L$

૩ (અ) ધારો કે $S = \{1, 2, 3\}$ તો બતાવો કે $\langle e(s), *, \oplus, \sim, s, \phi \rangle$ એ બુલીય બીજગણિત છે. ૭

(બ) બતાવો કે : નીચે દર્શાવેલ બુલીય અભિવ્યક્તિઓ α અને β એકરૂપ છે, તથા તેમને ગુણાકારના સરવાળા તરીકે વ્યક્ત કરો. ૬

$\alpha = (x \oplus y) * (x' \oplus z) * (y \oplus z)$

$\beta = (x * 2) \oplus (x' * y) \oplus (y * z)$

(ક) બુલીય વિધેય ૫

$f(x, y, z) = x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot y \cdot z' + x \cdot y' \cdot z'$

માટે લાક્ષણિક ઘટક શોધો.

અથવા

૩ (અ) બુલીય વિધેય $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [(x_1 + x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4)']'$ ને સરવાળાના ગુણાકાર તરીકે મેળવો. ૭

(બ) જો $\langle L, *, \oplus \rangle$ એ પૂરક વિભાજિત લેટિસ છે, $a, b \in L$ હોય તો સાબિત કરો કે : ૬

(૧) $(a * b)' = a' \oplus b'$

(૨) $(a \oplus b)' = a' * b'$

(ક) બતાવો કે : બુલીય બીજગણિતમાં જાલિકા સમરૂપતા કે જેમાં 0 તથા 1 ધરાવે તો તે બુલીય સમરૂપતા છે. ૫

૪ (અ) કવાઈન મેકક્લોસ્કી આલ્ગોરિધમનો ઉપયોગ કરી બુલીય અભિવ્યક્તિ $f(a, b, c, d) = \sum(0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 15)$નું ન્યૂનત્તમ સ્વરૂપ શોધો. ૮

(બ) બુલીય વિધેય $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot (x_2 + x_3 \cdot \overline{x_4})$ માટે કાર્નોફ આલેખનું નિર્દેશન કરો. ૬

(ક) સાબિત કરો કે સાન્ત સંખ્યામાં શિરોબિંદુવાળા અનંતગ્રાફને ઓછામાં ઓછી એ શિરોબિંદુની જોડને અસંખ્ય સમાંતર ધારો હોય છે. ૪

અથવા

૪ (અ) કાર્નોફ આલેખ નિર્દેશનનો ઉપયોગ કરી બુલીય વિધેય $f(a, b, c, d) = \sum(0, 1, 4, 5, 9, 11)$ ને ગુણાકારનું સરવાળાના ન્યૂનત્તમ સ્વરૂપમાં દર્શાવો. ૮

(બ) આપેલ બુલીય વિધેય માટે ઘનાત્મક નિર્દેશન મેળવો. ૬

$f(x, y, z, w) = x \cdot (y + z \cdot w')$

(ક) ઉદાહરણ આપી વ્યાખ્યાયિત કરો : ૪

(૧) શિરોબિંદુની કક્ષા

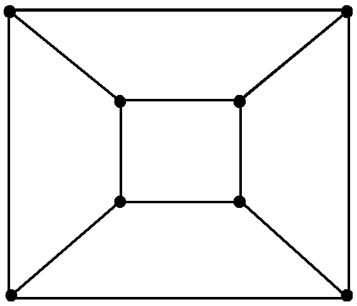
(૨) નિયમિત આલેખ.

૫ (અ) યુલર ગ્રાફને વ્યાખ્યાયિત કરો કોનિગ્સબર્ગ પુલ સમસ્યાને સમજાવો. ૭

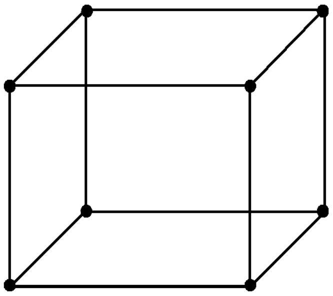
(બ) ગ્રાફના વિભાજનને વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે : ૬

ગ્રાફ G ને $m-$ધારો હોય તો તેને $2^{m-1} - 1$ અલગ પ્રકારે ઉપઆલેખમાં વિભાજિત કરી શકાય.

(ક) સમરૂપ આલેખો માટેની આવશ્યક શરત લખો. આપેલા ગ્રાફ સમરૂપ છે ? શાથી ? ૫



(a_1)



(a_2)

અથવા

૫ (અ) સંયોગી ગ્રાફને વ્યાખ્યાયિત કરો. જો ગ્રાફમાં અયુગ્મ કક્ષાવાળા ફક્ત બેજ શિરોબિંદુઓ હોય તો સાબિત કરો કે તેમને જોડતો પથ અસ્તિત્વ ધરાવે છે. ૭

(બ) ઉદાહરણો આપી સમજાવો : ૬

(૧) શિરોબિંદુ અને ધારાનું અલિપ્ત

(૨) યુનિકર્સલ ગ્રાફ

(ક) 'હેમિલટોનિયન' પથને વ્યાખ્યાયિત કરો. બેઠક સમસ્યા જણાવો તથા તેનો ઉકેલ મેળવો. ૫

૬ (અ) એકાંકી શિરોબિંદુ વ્યાખ્યાયિત કરો. $n-$શિરોબિંદુઓ વાળી દ્વિ-ટ્રીમાં એકાંકી શિરોબિંદુઓની સંખ્યા p હોય તો સાબિત કરો કે ૭

$$P=\frac{n+1}{2}$$

(બ) સાબિત કરો કે : $n-$શિરોબિંદુઓ, $(n-1)$ ધારો અને પરિપથ વિનાનો ગ્રાફ સંયોગી છે. ૬

(ક) સાબિત કરો કે : $n-$શિરોબિંદુઓ અને $e-$ધારો વાળા સંયોગી ગ્રાફમાં સર્જક ટ્રીને $(n-1)$ શાખાઓ તથા $(e-n+1)$ જીવાઓ હોય છે.

અથવા

૬ (અ) સાબિત કરો કે ગ્રાફ K_5 અસમતલીય છે. ૭

(બ) સાબિત કરો કે $n-$શિરોબિંદુવાળી ટ્રી T ને '$n-1$' ધારો હોય છે જ. ૬

(ક) સાબિત કરો કે $n-$શિરોબિંદુ અને $e-$ધારોવાળા સરળ સમતલીય ગ્રાફને $(e-n+2)$ ક્ષેત્રો હોય છે.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the instruction no. 1 of page no. 1.
(2) Answer all the questions.
(3) Figures to the right indicate marks of the question.
(4) Follow usual notations.

1 Answer the following questions : **15**

(1) In a lattice state distributive inequalities. **1**

(2) Define : **2**
(a) Poset
(b) Lattice Homomorphism

(3) In a distributive lattice L, if an element $a \in L$ has a complement 'a' then show that 'a'' is unique. **2**

(4) Express $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_3)'$ as the sum of products canonical form. **2**

(5) In a lattice If $a \le b$ then prove that and $a \oplus b = b$. **2**

(6) Define : Ring sum of graphs. **1**

(7) Draw a graph that was culer graph but not arbitrary traceable graph. **1**

(8) State number of Hamiltonian circuits in a complete graph of 10 vertices. **1**

(9) Find $l_{\min}$ of a Binary Tree with 5-vertices. **1**

(10) Define : Fusion of two vertices. **2**

2 (a) In a lattice $\langle L, \le \rangle$ prove the followings : **7**

(1) $a \le b \Leftrightarrow a * b = a, \forall a, b \in L$

(2) $a \le c \Rightarrow a \oplus (b * c) \le (a \oplus b) * c, \forall a, b, c \in L$

(b) Let $e(s)$ be the power set of s. Prove that $\langle e(s), \underline{c} \rangle$ is a partially ordered set. Is it lattice ? Justify your answer. **6**

(c) Let $\langle L, *, \oplus \rangle$ is a lattice. For any two elements $a, b,$ $\in L$ such that **5**
Then prove that the set
$[a, b] = \{x \in L \,|\, a \le x \le b\}$ is a sublattice.

OR

2 (a) Define : Direct product of two lattices. Prove that the direct product two lattices is also a lattice. **7**

(b) Let S_n be the set of all +ve divisors of 'n'. Let D denotes the relation of division in S_n. Prove that $\langle S_{30}, D\rangle$ is a lattice. Draw the Hasse diagram. **6**

(c) Show that in a lattice $\langle L, \leq\rangle$ **5**

$(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)\leq(a\oplus b)*(b\oplus c)*(c\oplus a)$,

where $a, b, C \in L$

3 (a) Let $S=\{1, 2, 3\}$. Then show that $\langle e(s), *, \oplus, \sim, s, \phi\rangle$ is is Boolean algebra. **7**

(b) Show that : the following Boolean expressions α and β are equivalent and obtain its sum of products canonical form. **6**

$\alpha=(x\oplus y)*(x'\oplus z)*(y\oplus z)$

$\beta=(x*2)\oplus(x'*y)\oplus(y*z)$

(c) Find characteristics number of Boolean function **5**

$f(x, y, z)=x'\cdot y'\cdot z+x'\cdot y\cdot z'+x\cdot y'\cdot z'$

OR

3 (a) Obtain the product of sums canonical form of the Boolean function. $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\left[(x_1+x_2)\cdot(x_3\cdot x_4)'\right]'$ **7**

(b) If $\langle L, *, \oplus\rangle$ be a complement distributive lattice and $a, b \in L$ then prove that **6**

(1) $(a*b)'=a'\oplus b'$

(2) $(a\oplus b)'=a'*b'$

(c) Show that a lattice Homomorphism on a Boolean Algebra which preserve 0 and 1 is a Boolean Homomorphism. **5**

4 (a) Use the Quine-McCluskey algorithm to find the minimal expression of the expression **8**

$f(a, b, c, d)=\sum(0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 15)$

(b) Draw the Karnaugh map for the Boolean function **6**

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1\cdot\left(x_2+x_3\cdot\overline{x_4}\right)$

(c) Prove that An infinite graph with finite number of vertices must have atleast one pair of vertices joined by infinite number of parallel edged. 4

OR

4 (a) Use the Karnaugh map presentation to find the minimal sum of the product of the function 8

$f(a,b,c,d)=\sum(0,1,4,5,9,11)$

(b) Obtain cube presentation for the boolean function 6

$f(x,y,z,w)=x\cdot(y+z\cdot w')$

(c) Define with illustrations : 4

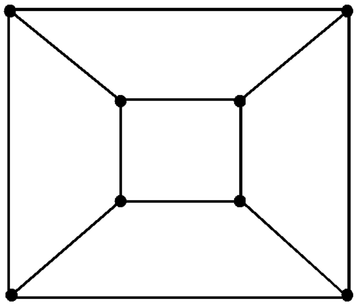
(1) Degree of a vertex

(2) Regular graph.

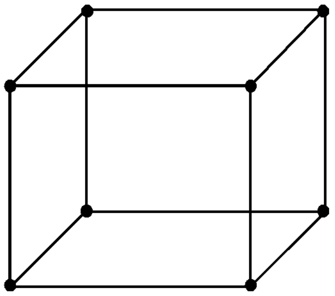
5 (a) Define : Euler graph. Explain Konigsburg bridge problem. 7

(b) Define : Decomposition of graph. Prove that A graph G containing m-edges can be decomposed into $2^{m-1}-1$ different pairs of subgraphs. 6

(c) Write necessary condition for Isomorphic grpahs. Are the following graphs isomorphic ? How ? 5



(a_1)



(a_2)

OR

5 (a) Define : Connected graph. If a graph has exactly two vertices of odd degree than there must be a path joining these two vertices. 7

(b) Explain with illustrations : **6**

(1) Delation of vertex and edge

(2) Un-icursal graph.

(c) Define : Hamiltonian path. State and solve seating problem. **5**

6 (a) Define : Pendent vertex. Prove that the number of pendant vertices 'p' in a Binary tree with $n-$vertices then $P=\frac{n+1}{2}$ **7**

(b) Prove that : A graph with $n-$vertices, '$n-1$' edges and no-circuit is connected. **6**

(c) Prove that a spanning tree in a connected graph of $n-$vertices and $e-$edges has '$n-1$' branches and $(e-n+1)$ chords. **5**

OR

6 (a) Prove that a graph K_5 is non planar. **7**

(b) Prove that : A tree T with $n-$vertices must have '$n-1$' edges. **6**

(c) Prove that the simple connected planar graph with $n-$vertices and $e-$edges has $(e-n+2)$ regions. **5**